Variedades topológicas

Una ***n*-variedad** es un espacio topológico T_2 con una base numerable tal que todo punto tiene un entorno homeomorfo al disco n-dimensional $D^n = \{(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mid x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2 \leq 1\}$ (con la topología usual).

Una ***n*-variedad con borde** es un espacio topológico T_2 con una base numerable tal que todo punto tiene un entorno homeomorfo al disco n-dimensional D^n o al semidisco n-dimensional $D^n_+ = \{(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in D^n \mid x_1 \geq 0\}$ (con la topología usual).
El borde de la variedad es el conjunto de puntos con entorno homeomorfo a D^n_+.

Ejemplos de 1-variedades:
- $\mathbb{R}$ y S^1 son 1-variedades.
- $[0, \infty)$ y $[0, 1]$ son 1-variedades con borde.

Teorema. Sea M una 1-variedad. Entonces: **i)** Si M es compacta y conexa $\Rightarrow M \simeq S^1$.
ii) Si M es conexa pero no es compacta $\Rightarrow M \simeq \mathbb{R}$.
iii) Si M no es conexa $\Rightarrow M$ es una unión disjunta (finita o numerable) de las anteriores.

Superficies

Una **superficie** (con borde) es una 2-variedad conexa (con borde).

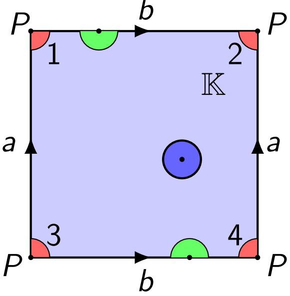
Ejemplos. i) $\mathbb{R}^2$ y, en general, cualquier subconjunto abierto de $\mathbb{R}^2$ es una superficie.

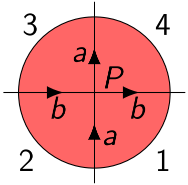
ii) Un cilindro o una banda de Moebius sin sus curvas borde, son superficies.

iii) S^2, $\mathbb{T}$, $\mathbb{K}$ y $\mathbb{P}$ son superficies **compactas**.

Se puede ver a partir de sus modelos como cociente de un cuadrado, que son espacios T_2 con una base numerable, y todo punto tiene un entorno homeomorfo a un disco.

Por ejemplo, para $\mathbb{K}$, un punto interior al cuadrado tiene un entorno que es un disco, un punto interior a una arista tiene un entorno formado por 2 semidiscos con los diámetros identificados y al pegarlos forman un disco, y los 4 vértices del cuadrado se identifican a un mismo punto, que tiene un entorno formado por 4 sectores de circunferencia con los radios identificados (numerados en la figura del 1 al 4), que al pegarlos forman un disco.

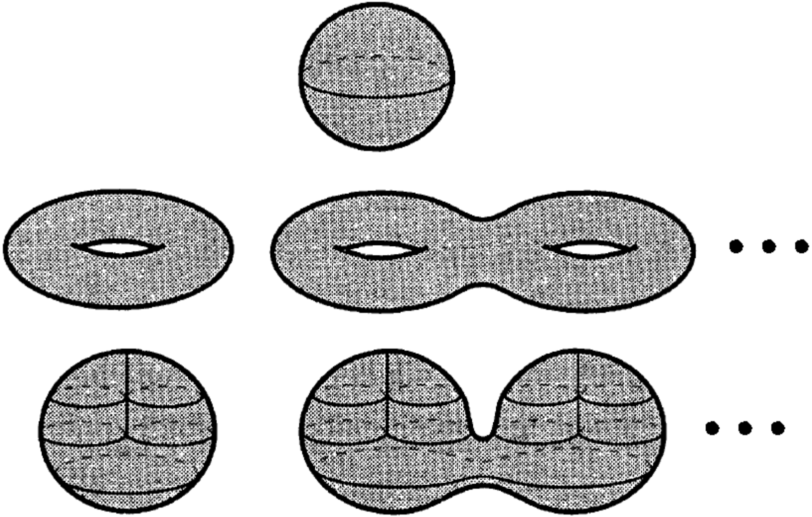




iv) El cilindro y la banda de Moebius con sus curvas borde son superficies compactas con borde (los puntos del borde tienen entornos homeomorfos a un semidisco).

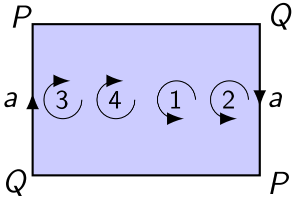
Clasificación de las superficies compactas

Teorema de clasificación de las superficies compactas. Cualquier superficie compacta es homeomorfa a la la 2-esfera, a una suma conexa de *n*-toros, o a una suma conexa de *n*-planos proyectivos.



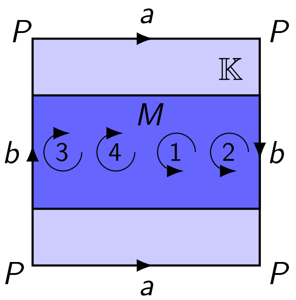
Superficies orientables

La banda de Moebius M tiene una sola cara. Eso implica que si elegimos un punto 1 y una dirección de rotación positiva alrededor de él, si desplazamos el punto hacia la derecha a un punto 2 manteniendo la misma rotación, cuando volvemos al punto 1 por la izquierda la orientación ha cambiado.
Se dice entonces que M es **no orientable**.



La botella de Klein tiene esta misma propiedad pues contiene una banda de Moebius.

Se dice que una superficie es **orientable** si no contiene una banda de Moebius.



Teorema. Si $S \simeq S'$, entonces S es orientable si y solo si lo es S'.

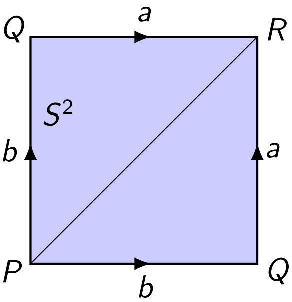
Idea demostración. Si $S \overset{f}{\simeq} S'$ y $S \supset M$ banda de Moebius, entonces $S' \supset f(M)$ que también es una banda de Moebius.

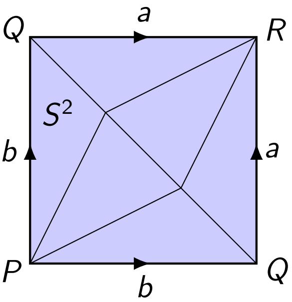
Ejercicio. Comprueba que el plano proyectivo es no orientable.

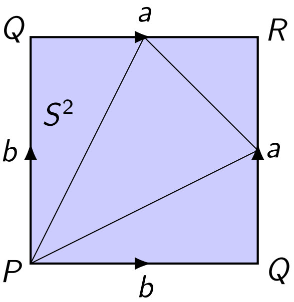
Triangulación de una superficie

Una triangulación de una superficie compacta (con o sin borde) es una descomposición de ella en un número finito de triángulos topológicos[1] tal que dos triángulos o son disjuntos, o tienen exactamente una arista en común, o tienen exactamente un vértice en común.

Ejemplo. Si consideramos una esfera como un cuadrado con lados identificados dos a dos, ¿cuáles de las siguientes serían triangulaciones? Sólo la del centro.





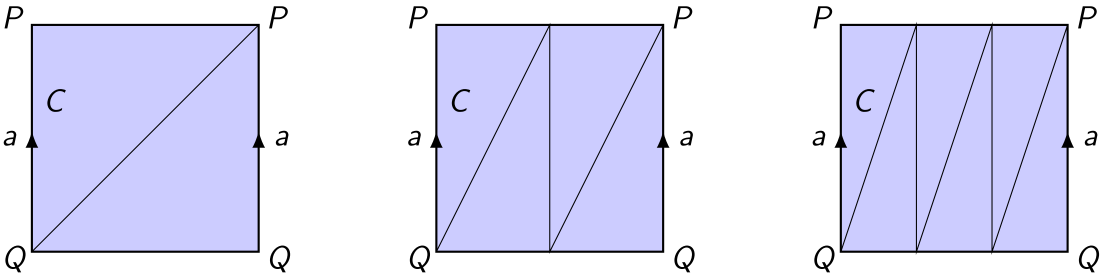


Observación. Como un tetraedro es homeomorfo a la esfera, existe una triangulación de la esfera con 4 triángulos.

[1] Un triángulo topológico es un conjunto homeomorfo a un triángulo plano T. Los vértices y aristas de un triángulo topológico son la imagen mediante ese homeomorfismo de los vértices y aristas de T

Triangulación de una superficie

Ejemplo. Si consideramos un cilindro como un cuadrado con dos lados identificados, ¿cuáles de las siguientes serían triangulaciones? Sólo la de la derecha.



Ejercicio. Encuentra triangulaciones del cilindro y de la banda de Moebius con 5 o menos triángulos.

Comparación de triangulaciones

Sean T, T' triangulaciones de una superficie compacta S. Entonces

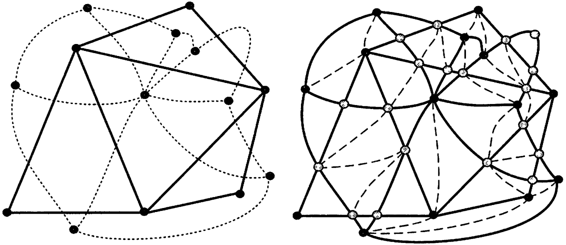
i) T' es una subdivisión de T si todo triángulo de T es unión de triángulos de T'.

ii) T' es equivalente a T si existe un homeomorfismo $h : S \longrightarrow S$ tal que para todo triángulo t de T, $h(t)$ es un triángulo de T'.

Lema. Sean T_1 y T_2 dos triangulaciones en posición general, es decir, tales que:

i) Cada vértice de una de las triangulaciones está en en interior de un triángulo de la otra.

ii) Cada arista de una de las triangulaciones interseca a cada arista de la otra en a lo sumo una cantidad finita de puntos.



Entonces existe T' subdivisión de T_1 y T_2.

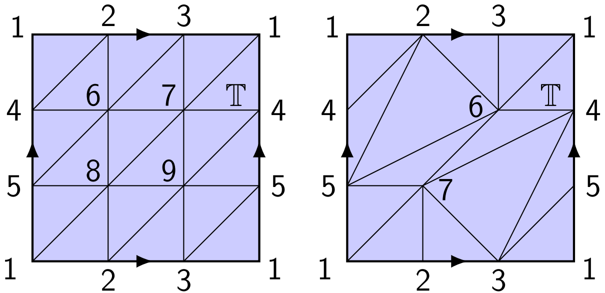
- $v(T') \supset (T_1) \cup v(T_2) \cup (A(T_1) \cap A(T_2)$,
- $A(T') \supset A(T_1) \cup A(T_2)$ divididas por los puntos de corte de $\cup A(T_1)$ y T_2,
- se añade un vértice en una de las aristas de las regiones limitadas por 2 aristas,
- se añaden aristas en el interior de las regiones limitadas por 4 o más aristas.

Teorema. Sean T_1, T_2 triangulaciones de S. Entonces existen T_1', T_2' subdivisiones de T_1 y T_2 respectivamente tales que T_1' y T_2' son equivalentes.

Toda superficie compacta es triangulable

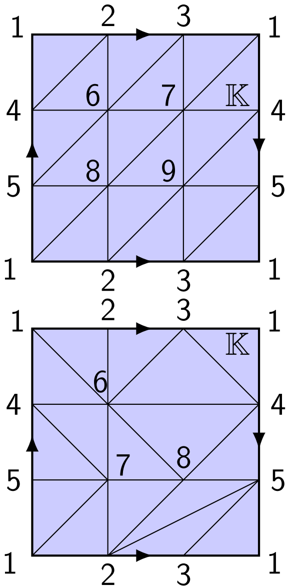
Teorema. Toda superficie compacta se puede triangular

Ejemplo. Dos triangulaciones de $\mathbb{T}$:



La de la izquierda es la más regular (tiene 9 vértices), la de la derecha tiene el menor número posible de vértices (siete).

Ejemplo. Dos triangulaciones de $\mathbb{K}$

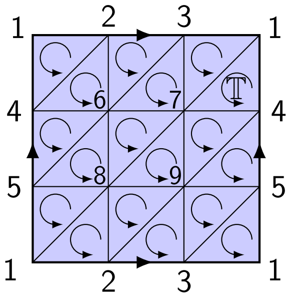


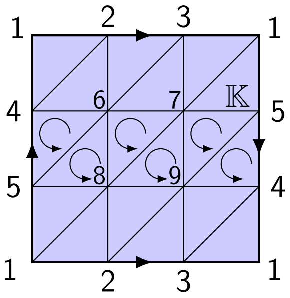
Ejercicio. Obtén dos triangulaciones del plano proyectivo, una regular en el cuadrado con 10 vértices, y otra en el modelo del círculo o, equivalentemente, en un hexágono, con solo 6 vértices.

Orientación de una superficie triangulada

Una **orientación de un triángulo o arista** consiste en ordenar sus vértices.
Una orientación de un triángulo induce una orientación en sus aristas.
Una triangulación de una superficie es **orientable** si es posible orientar sus triángulos de manera que dos triángulos que comparten una arista inducen orientaciones opuestas en esa arista común.

Ejemplo. El toro triangulado (izda) es orientable y la botella de Klein (dcha) no.
Si en $\mathbb{T}$ orientamos el símplice superior izquierdo como $\overline{142} = (\overline{14}, \overline{42}, \overline{21})$, el siguiente sería $\overline{246} = (\overline{24}, \overline{46}, \overline{62})$, el siguiente $\overline{263} = (\overline{26}, \overline{63}, \overline{32})$, $\ldots$, siendo posible orientar todos los símplices de forma compatible.





Si en $\mathbb{K}$ orientamos el símplice central izquierdo como $\overline{456}$, el siguiente a la derecha sería $\overline{586}$, y los siguientes $\overline{687}$, $\overline{789}$, $\overline{479}$, $\overline{459}$ que no es compatible con $\overline{456}$, así es imposible orientar todos los símplices de forma compatible.

Orientación de una superficie compacta

Teorema. Una superficie compacta S es orientable si y solo si tiene una triangulación orientable (si y solo si cualquier triangulación suya es orientable).

Idea de la demostración. 1. Se comprueba primero que si una triangulación de una superficie compacta es orientable entonces cualquier otra triangulación también lo es.
Esto es consecuencia de los siguientes dos hechos:
- dos triangulaciones equivalentes, o son ambas orientables, o no lo es ninguna.
- si una triangulación es orientable, cualquier subdivisión suya también.

2. Si una superficie S no es orientable contiene una banda de Moebius M. Si T es una triangulación de S existe una subdivisión de la misma tal que M es unión de triángulos de T. Entonces los triángulos de T dentro de M no pueden ser orientados de forma coherente.

3. Si una superficie S tiene una triangulación no orientable, existe una cadena de triángulos cuya unión es homeomorfa a una banda de Moebius.

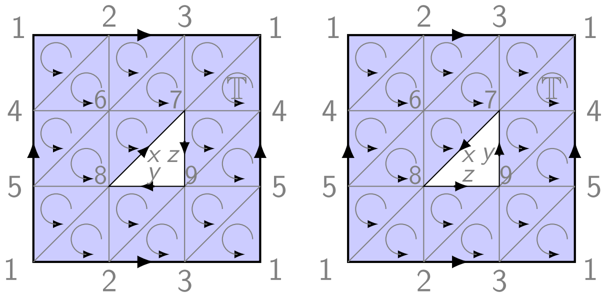
Ejemplo. S^2 y $\mathbb{T}$ son orientables.

Ejemplo. $S^2 \not\approx \mathbb{K}$, $S^2 \not\approx \mathbb{P}$, $\mathbb{T} \not\approx \mathbb{K}$, $\mathbb{T} \not\approx \mathbb{P}$, .

Orientación de sumas conexas de superficies

Teorema. Sea $M = M_1 \# M_2$. Entonces M es orientable si y solo si lo son M_1 y M_2.

Demostración. Supongamos que tenemos M_1 y M_2 trianguladas y que hacemos la suma conexa de M_1 y M_2 suprimiendo un triángulo en cada uno de ellos y pegándolos arista a arista. Pegando esas aristas de manera adecuada, la orientación adecuada, las orientaciones de M_1 y M_2 inducen una orientación de $M = M_1 \# M_2$.



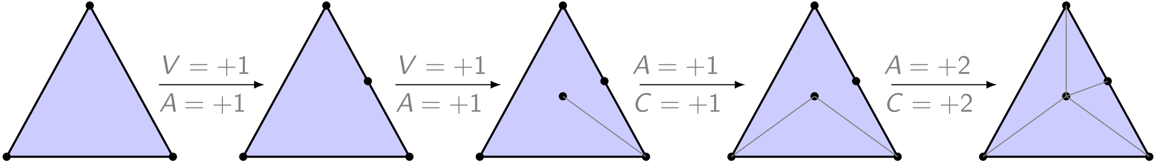
Recíprocamente, dada una triangulación orientable de $M = M_1 \# M_2$, existe una subdivisión de T a partir de la cual se pueden obtener triangulaciones de M_1 y M_2.

Característica de Euler de una superficie

Sea M una superficie compacta. La **característica de Euler** de M es $\chi(M) = V - A + C$ donde V es el número de vértices, A el número de caras y C el número de vértices de una triangulación de M.

Teorema. La característica de Euler de M es independiente de la triangulación escogida.

Idea demostración. Dadas dos triangulaciones T_1 y T_2, sea T una subdivisión común. Entonces $V - A + C$ para T_1 y T_2 coinciden con el valor para T pues las operaciones que se hacen al subdividir una triangulación preservan ese valor.

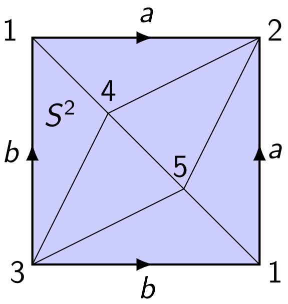


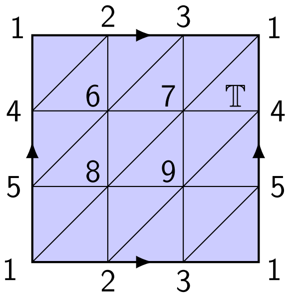
Teorema. Si $M \simeq M' \Rightarrow \chi(M) = \chi(M')$.

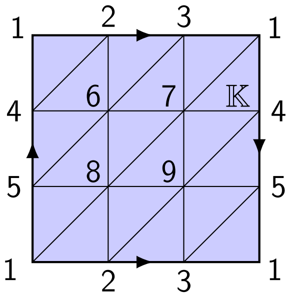
Cálculo de la característica de Euler de superficies

Ejemplo. $\chi(S^2) = 2$ pues para la triangulación de la figura, se tiene $V = 5$, $A = 9$, $C = 6$.

Ejemplo. $\chi(\mathbb{T}) = \chi(\mathbb{K}) = 0$, pues para las triangulaciones de la figura, en ambos casos se tiene $V = 9$, $A = 27$, $C = 18$.







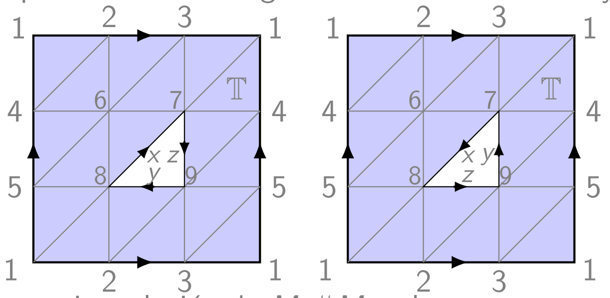
Observación. Sabemos que todo grafo en la esfera cumple la fórmula de Euler para los grafos planos $V - A + C = 2 = \chi(S^2)$.
¿Es cierto, por ejemplo, que todo grafo en el toro cumple que $V - A + C = 0 = \chi(\mathbb{T})$?

Ejercicio. Comprueba que la característica de Euler del plano proyectivo es 1.

Característica de Euler de sumas conexas de superficies

Teorema. Sea $M = M_1 \# M_2$. Entonces $\chi(M) = \chi(M_1) + \chi(M_2) - 2$.

Demostración. Supongamos que tenemos M_1 y M_2 trianguladas y que hacemos la suma conexa de M_1 y M_2 suprimiendo un triángulo en cada uno de ellos y pegándolos arista a arista.



Entonces se obtiene una triangulación de $M_1 \# M_1$ tal que

$$
\begin{aligned}
\chi(M_1\#M_2) &= V(M_1\#M_2) - A(M_1\#M_2) + C(M_1\#M_2)\\
&= (V(M_1) + V(M_2) - 2) - (V(M_1) + V(M_2) - 3) + (V(M_1) + V(M_2) - 3)\\
&= \chi(M_1) + \chi(M_2) - 2.
\end{aligned}
$$

Corolario. Sea $M = M_1 \# M_2 \# \dots \# M_n$. Entonces $\chi(M) = \chi(M_1) + \chi(M_2) + \cdots + \chi(M_n) - 2(n-1)$.

Característica de Euler de sumas conexas de superficies

Ejemplos. Si denotamos $n\,\mathbb{T}$ la suma conexa de n toros ($n\,\mathbb{T} = \mathbb{T}\#\mathbb{T}\# \overset{n}{\ldots} \#\mathbb{T}$):

- $\chi(\mathbb{T}) = 0$.
- $\chi(2\,\mathbb{T}) = \chi(\mathbb{T}) + \chi(\mathbb{T}) - 2 = -2$.

y, en general,

- $\chi(n\,\mathbb{T}) = -2(n-1) = 2 - 2n$.

Si denotamos $n\,\mathbb{P}$ la suma conexa de n planos proyectivos ($n\,\mathbb{P} = \mathbb{P}\#\mathbb{P}\# \overset{n}{\ldots} \#\mathbb{P}$):

- $\chi(\mathbb{P}) = 1$.
- $\chi(2\,\mathbb{P}) = \chi(\mathbb{P}) + \chi(\mathbb{P}) - 2 = 0$.

y, en general,

- $\chi(n\,\mathbb{P}) = n - 2(n-1) = 2 - n$.

Clasificación de las superficies compactas

Teorema de clasificación de las superficies compactas. Cualquier superficie compacta es homeomorfa a la la 2-esfera, a una suma conexa de n-toros, o a una suma conexa de n-planos proyectivos.

Demostración. Que todas estas superficies son distintas se deduce al dividirlas en orientables y no orientables y calcular sus características de Euler (ver tabla).

Superficies orientables				Superficies no orientables	
S^2	2	$\mathbb{T}$	0	$\mathbb{P}$	1
		$2\,\mathbb{T}$	-2	$2\,\mathbb{P}$	0
		$3\,\mathbb{T}$	-4	$3\,\mathbb{P}$	-1
		$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
		$n\,\mathbb{T}$	$2-2n$	$n\,\mathbb{P}$	$2-n$

Ver que cualquier superficie compacta es homeomorfa a una de las anteriores es más complicado. La técnica consiste en realizar operaciones de cortado y pegado en una superficie hasta reducirla a una de las anteriores.

Observación La tabla anterior proporciona sencillo algoritmo para reconocer superficies. Basta ver si es o no orientable y calcular su característica de Euler.

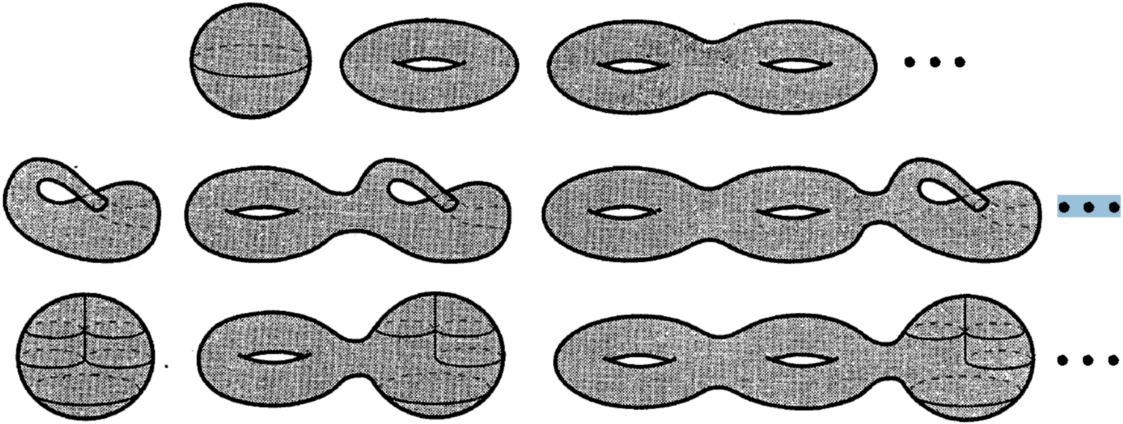
Observación. Como $\mathbb{K}$ no es orientable y $\chi(\mathbb{K}) = 0$, entonces $\mathbb{K} \simeq 2\,\mathbb{P}$.

Ejercicio. Demuestra que $\mathbb{T} \# \mathbb{P} \simeq \mathbb{K} \# \mathbb{P}$.

Solución. Ambas son no orientables y $\chi(\mathbb{T} \# \mathbb{P}) = 0 + 1 - 2 = \chi(\mathbb{K} \# \mathbb{P})$.

Clasificación de las superficies compactas con borde

Teorema. Toda superficie compacta es homeomorfa a S^2, nT, $nT \# \mathbb{K}$ o $nT \# \mathbb{P}$.



Demostración. Es particular, $\mathbb{P} \simeq 0\,\mathbb{T} \# \mathbb{P}$, $\quad 2\,\mathbb{P} \simeq \mathbb{K} \simeq 0\,\mathbb{T} \# \mathbb{K}$,
$3\,\mathbb{P} \simeq \mathbb{K} \# \mathbb{P} \simeq \mathbb{T} \# \mathbb{P}$, $\quad 4\,\mathbb{P} \simeq \mathbb{T} \# \mathbb{P} \# \mathbb{P} \simeq \mathbb{T} \# \mathbb{K}$,...

En general, usando que $2\,\mathbb{P} \simeq \mathbb{K}$ y $\mathbb{T} \# \mathbb{P} \simeq \mathbb{K} \# \mathbb{P}$, se demuestra por inducción que:

$$(2n+1)\,\mathbb{P} \simeq n\,\mathbb{T} \# \mathbb{P} \qquad (2n+2)\,\mathbb{P} \simeq n\,\mathbb{T} \# \mathbb{K}$$

Clasificación de las superficies compactas con borde

Teorema. Toda superficie compacta con borde es homeomorfa a S^2, nT, $nT\#\mathbb{K}$ o $nT\#\mathbb{P}$ con un número finito de discos (abiertos) removidos de la superficie.

Demostración. Es consecuencia de los dos siguientes hechos:
i) Si M es una superficie con borde, su borde es una 1-variedad.
ii) Si M es una superficie compacta con borde, su borde tiene una cantidad finita de componentes.
Así, si M es una superficie compacta con borde, cada componente del borde es homeomorfa a S^1. Para cada una de esas componentes podemos pegar un disco identificando el borde del disco con esa componente. Tras pegar los discos obtenemos una variedad compacta sin borde M', que será homeomorfa a S^2, nT, $nT\#\mathbb{K}$ o $nT\#\mathbb{P}$..
Así, las variedades compactas con borde son exactamente las que se pueden obtener de S^2, nT, $nT\#\mathbb{K}$ o $nT\#\mathbb{P}$. tras remover una cantidad finita de discos.

Observación. Para identificar una variedad compacta con borde M, basta tener en cuenta que, si M' es la variedad obtenida tras tapar los n "agujeros" de M, entonces:
i) M' es orientable si y solo si lo es M.
ii) $\chi(M') = \chi(M) + n$.

Ejercicios

Ejercicio 1. Sea T el toro y p un punto de T. Sea $\mathbb{K}$ la botella de Klein y sea q un punto de T. ¿Son $T \setminus \{p\}$ y $\mathbb{K} \setminus \{q\}$ topológicamente equivalentes (homeomorfos)? ¿Son $T \setminus \{p\}$ y $\mathbb{K} \setminus \{q\}$ homotópicamente equivalentes?

Solución: $T \setminus \{p\} \not\simeq \mathbb{K} \setminus \{q\}$ pues $T \setminus \{p\}$ es orientable pero $\mathbb{K} \setminus \{q\}$ no lo es.

- $T \setminus \{p\}$ es orientable pues si no fuera contendría una banda de Moebius y entonces T también contendría una banda de Moebius.
- $\mathbb{K} \setminus \{q\}$ no es orientable pues a partir de su modelo plano se puede ver que siempre existe una banda de Moebius en $\mathbb{K} \setminus \{q\}$.

$T \setminus \{p\} \sim \mathbb{K} \setminus \{q\}$ pues ambos son homótopos (mediante una retracción de deformación) a $S^1 \vee S^1$.

Ejercicio 2. ¿Qué superficies es $M = \mathbb{K} \# \mathbb{K} \# \mathbb{P} \# \mathbb{P} \# \mathbb{T} \# \mathbb{T}$?

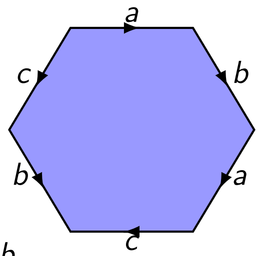
Solución: M no es orientable pues $\mathbb{P}$ contiene una banda de Moebius, independientemente de los discos que quitemos para hacer la suma conexa con el resto.

Por otra parte, $\chi(M) = \chi(\mathbb{K} \# \mathbb{K} \# \mathbb{P} \# \mathbb{P} \# \mathbb{T} \# \mathbb{T}) = \chi(\mathbb{K}) + \chi(\mathbb{K}) + \chi(\mathbb{P}) + \chi(\mathbb{P}) + \chi(\mathbb{T}) + \chi(\mathbb{T}) - 2 \times 6 = 0 + 0 + 1 + 1 + 0 + 0 - 2 \times 5 = -8$. Por tanto, $M \simeq 10\,\mathbb{P}$.

Solución directa: $M = \mathbb{K} \# \mathbb{K} \# \mathbb{P} \# \mathbb{P} \# \mathbb{T} \# \mathbb{T} \simeq \mathbb{P} \# \mathbb{P} \# \mathbb{P} \# \mathbb{P} \# \mathbb{P} \# \mathbb{P} \# \mathbb{K} \# \mathbb{T} \simeq \mathbb{P} \# \mathbb{P} \# \mathbb{P} \# \mathbb{P} \# \mathbb{P} \# \mathbb{P} \# \mathbb{P} \# \mathbb{P} \# \mathbb{T} \simeq \mathbb{P} \# \mathbb{P} \# \mathbb{P} \# \mathbb{P} \# \mathbb{P} \# \mathbb{P} \# \mathbb{P} \# \mathbb{P} \# \mathbb{K} \simeq 10\,\mathbb{P}$.

Ejercicios

Ejercicio 3. Sea X el espacio obtenido al identificar los lados de un hexágono siguiendo la regla $abacb^{-1}c^{-1}$.



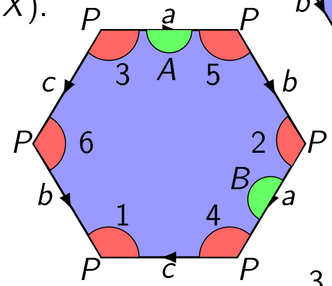
i) Comprueba si es una superficie o una superficie con borde.

En caso de serlo:

ii) ¿Es X orientable?

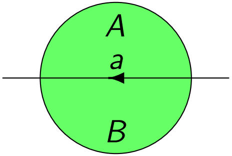
iii) Halla una triangulación de X y calcula $\chi(X)$.

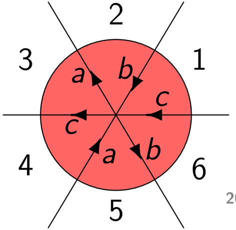
iv) ¿Que superficie es X?



Solución: **i)** Un punto interior a una arista tiene un entorno formado por 2 semidiscos (A y B) con los diámetros identificados que al pegarlos forman un disco.

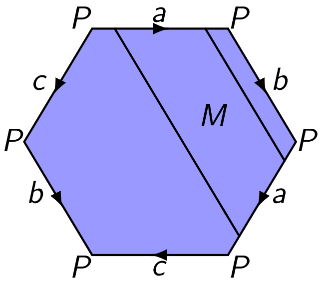
Por otra parte, los 6 vértices del hexágono se identifican a un mismo punto, que tiene un entorno formado por 6 sectores de circunferencia con los radios identificados (numerados en la figura del 1 al 6), que al pegarlos forman un disco.

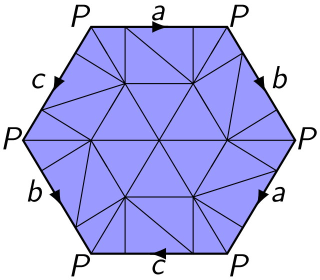




Ejercicios

b) X no es orientable pues contiene una banda de Moebius que une las aristas marcadas a.





c) Una triangulación se muestra en la figura y da el valor $\chi(X) = V - A + C = 14 - 45 + 30 = -1$.

d) Como X no es orientable, ha de ser $X \simeq 3\,\mathbb{P}$.

Ejercicio 4. Repite el ejercicio anterior para los espacios obtenido al identificar los lados de un hexágono siguiendo las siguientes reglas:

a) La regla $ab^{-1}a^{-1}bcc$.

b) La regla $aab^{-1}b^{-1}cc$.

b) La regla $ab^{-1}cba^{-1}d$ (los lados c y d no se identifican con ningún otro lado).